MATHÉMATIQUES

(Option générale)

DURÉE : 2 heures

Est autorisé : l'usage d'une seule calculatrice de poche y compris programmable, alphanumérique ou à écran graphique, à condition que son fonctionnement soit autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'une imprimante.

Note importante : les réponses non justifiées (par une démonstration ou un résultat précis du cours) ne seront pas prises en compte.

La qualité de la rédaction (présentation, orthographe, rigueur) entrera pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Tourner la page S.V.P.

Exercice 1

Partie A

1- Soit $M_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels et soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Déterminer l'ensemble des matrices M de $M_2(\mathbb{R})$ vérifiant $AM = MA$.

2- Soit $E = \left\{(a, b, b, a+b) \in \mathbb{R}^4 \,/ (a, b) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. En donner une base et la dimension.

3- Soit $F = \left\{(a, b, a, a-b) \in \mathbb{R}^4 \,/ (a, b) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, supplémentaire de E dans $\mathbb{R}^4$.

Partie B

Soit f l'application définie par :

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}^4 &\to \mathbb{R}^4 \\ (a, b, c, d) &\mapsto (a+b-2c+d, -a+b+d, -a+b+d, 2b-2c+2d) \end{aligned}$$

1- Montrer que l'application f est linéaire.

2- Déterminer l'ensemble des éléments de $\mathbb{R}^4$ dont l'image par f est $(0,\ 0,\ 0,\ 0)$.

Vérifier que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ dont on donnera une base et la dimension.

3- Montrer que l'image d'un élément quelconque de $\mathbb{R}^4$ est un élément de E.

4- Déterminer l'image d'un élément quelconque de E. En déduire l'ensemble des images par f des éléments de $\mathbb{R}^4$.

5- Quelle est l'application $f \circ f$?

6- a- Déterminer la matrice N de l'application f dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

b- En utilisant la matrice N, vérifier le résultat obtenu en B.5.

7- Soit $u_1 = (1, 0, 0, 1)$, $u_2 = (0, 1, 1, 1)$, $u_3 = (1, 0, 1, 1)$ et $u_4 = (0, 1, 0, -1)$.

a- Montrer que (u_1, u_2, u_3, u_4) est une base de $\mathbb{R}^4$.

b- Déterminer la matrice de l'application f dans cette base.

Exercice 2

Partie A

On considère dans cette partie un réel x élément de $[\,0,1\,[$.

1- a- Démontrer que pour tout entier naturel n : $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$.

b- En déduire que $\sum_{k=0}^{n} x^k$ admet une limite lorsque n tend vers $+\infty$ et préciser cette limite.

2- a- On pose $J_n(x) = \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t}\,dt$. Démontrer que : $0 \le J_n(x) \le \frac{x^{n+2}}{1-x}$.

b- En déduire que $J_n(x)$ admet une limite lorsque n tend vers $+\infty$ et préciser cette limite.

3- Calculer $I(x) = \int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt$. Calculer $\int_0^x t^k\,dt$.

4- a- On pose $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}}{k+1}$. Montrer que $S_n(x) = I(x) - J_n(x)$.

b- En déduire que $S_n(x)$ admet une limite lorsque n tend vers $+\infty$ et préciser cette limite.

Partie B

On dispose d'un dé équilibré et d'une urne qui à l'origine contient une boule blanche.
On effectue une suite de lancers successifs avec le dé et à chaque fois que l'on obtient un résultat différent du six, on ajoute une boule rouge dans l'urne. Lorsque l'on obtient le premier six, on tire une boule de l'urne, et l'expérience s'arrête.

1- Pour k entier naturel non nul, soit A_k l'événement : « on a obtenu le premier six au k-ième lancer du dé ».

a- Calculer $P(A_k)$. Vérifier que $\sum_{k=1}^{+\infty} P(A_k) = 1$.

b- Quelle est la probabilité d'avoir obtenu le premier six au plus tard au troisième lancer ?

c- Quelle est la probabilité d'avoir obtenu le premier six au plus tard au k-ième lancer ?

d- Quelle est la probabilité d'avoir obtenu le premier six après le k-ième lancer sachant qu'on l'a obtenu au plus tard au $(2k)$-ième lancer ?

2- On appelle B l'événement : « on a obtenu la boule blanche ».

a- Si les $k-1$ premiers lancers n'ont pas donné de six, quelle est la composition de l'urne juste avant qu'on ne lance le dé pour la k-ième fois ?

b- En déduire $P(B \cap A_k)$, puis $\sum_{k=1}^{n} P(B \cap A_k)$.

c- Calculer $P(B)$.